УДК 624.04

КИНЕМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ФОРМИРОВАНИЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МАТРИЦЫ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ

Монахов Владимир Андреевич,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства

г. Пенза,

доктор технических наук, профессор кафедры «Механика».

Булавина Дарья Андреевна,

Пензенский государственный университет архитектуры и строительства,

г. Пенза,

студент.

Аннотация

Формирование геометрической матрицы стержневой системы кинематическим методом базируется на анализе схем возможных перемещений её шарнирной схемы, полученной при дискретизации. Придавая независимым узловым перемещениям единичные значения, нетрудно вычислить величины угловых деформаций в каждом узле. Значения углов поворота конечных элементов, соответствующие указанным перемещениям и представленные по столбцам, образуют *геометрическую матрицу* стержневой системы. В соответствии с принципом двойственности строительной механики на её основе путём транспонирования выводится матрица равновесия.

Ключевые слова: стержневая система, механическая модель, конечные элементы, геометрическая матрица, узловые перемещения.

KINEMATIC METHOD OF FORMING THE GEOMETRIC MATRIX OF THE ROD SYSTEM

Monakhov Vladimir Andreevich,

Penza State University of Architecture and Construction, Penza,

Doctor of Sciences, Professor of the department “Mechanics”.

Bulavina Daria Andreevna,
Penza State University of Architecture and Construction, Penza,
student.

Abstract

The formation of the geometric matrix of the rod system by the kinematic method is based on the analysis of the schemes of possible displacements of its hinge scheme obtained during discretization. By assigning unit values to independent node displacements, it is easy to calculate the values of angular deformations in each node. The values of the rotation angles of finite elements corresponding to the specified displacements and represented by columns form a geometric matrix of the rod system. In accordance with the principle of duality of structural mechanics on its basis by transposing the equilibrium matrix is derived.

Keywords: rod system, mechanical model, finite elements, geometric matrix, nodal displacements.

Введение. В качестве механической модели рамы рассматривается стержневая система, состоящая из недеформируемых конечных элементов, связанных между собой «упругими» шарнирами. Характеристики шарниров отвечают распределению жёсткостей, указанному на расчётной схеме стержневой системы, в частности, консольной рамы (длина отдельного подкоса рамы l составляет 1 *м* и угол наклона равен $\psi = 60^\circ$). Дискретизации схемы осуществляется путём деления системы на конечные элементы (КЭ); их нумерация ведётся римскими цифрами (*j* = I,II,…,VIII). Узлами считаются характерные расчётные сечения; они указаны на рис. 1,а,б арабскими цифрами $(i = 1,2,...,10)$. Предполагается, что внешние нагрузки прикладываются в узлах.

а) б) в)

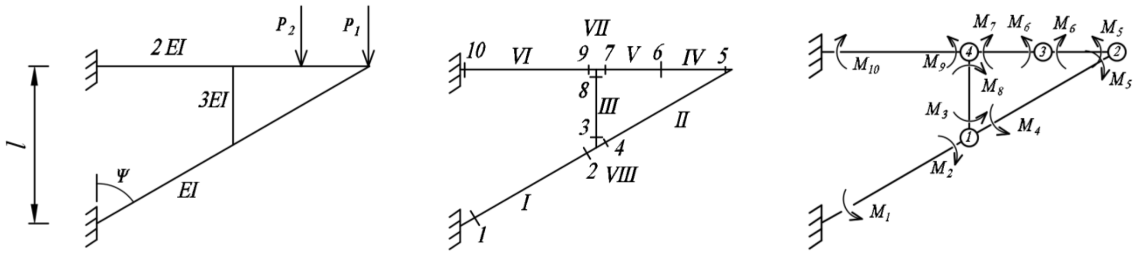

Рисунок 1 - Расчетная схема рамы и её дискретная модель

Одновременно вводится правило знаков для изгибающих моментов – они положительны, если растянуты внутренние волокна стержней (рис. 1,в). В соответствии с принятым правилом в дальнейшем определяются и знаки сосредоточенных изгибных деформаций в узлах. Их величины находят путём анализа схем возможных перемещений узлов по направлению независимых перемещений $\bar{\zeta}$. Упорядоченная совокупность величин углов поворота в каждом узле образует геометрическую матрицу $[H]$, позволяющую установить сосредоточенные изгибные деформации $\bar{\varkappa}$ в зависимости от узловых перемещений, заданных в глобальной системе координат $\bar{\varkappa} = [H]\ \bar{\zeta}$, где $\bar{\zeta}$ - вектор-столбец перемещений узлов рамы (рис. 2, а,б) [1, 2].

а) б)

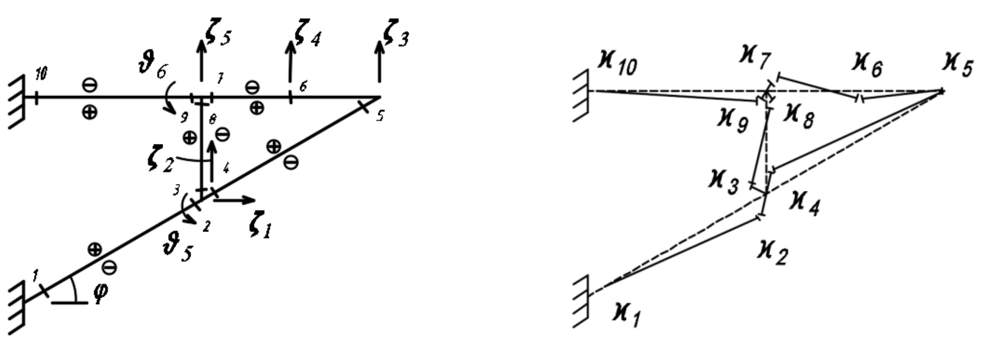

Рисунок 2 - Независимые перемещения узлов и схема сосредоточенных изгибных деформаций рамы

Кинематический (геометрический) метод формирования геометрической матрицы рамы.

Пренебрегая влиянием продольных деформаций можно ограничиться рассмотрением пяти схем возможных перемещений многозвенной цепи, вызванных принудительными смещениями узлов в характерных направлениях (рис. 3,а, б, в, г, д).

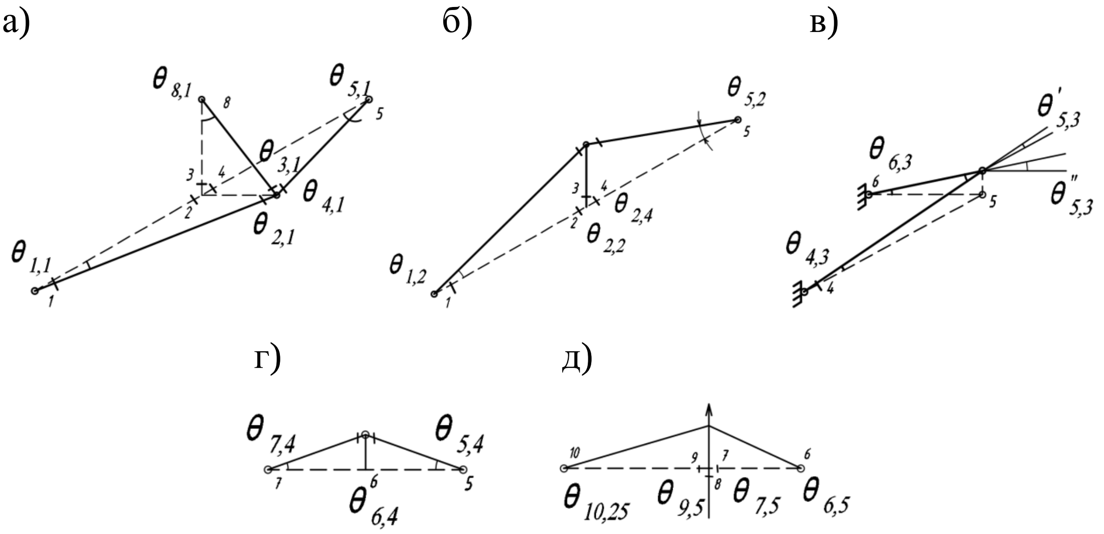

Рисунок 3 - Возможные перемещения многозвенной цепи

На основе данных схем единичных перемещений несложно определить величины угловых деформаций в каждом узле:

а) при смещении 2-го узла по горизонтали вправо

$$\theta_{1,1} = \sin\varphi / l_1, \qquad \theta_{21} = -\sin\varphi / l_1, \qquad \theta_{3,1} = -1/l_3,$$
$$\theta_{4,1} = -\sin\varphi / l_1, \qquad \theta_{51} = \sin\varphi / l_1, \qquad \theta_{8,1} = 1/l_3;$$

б) при смещении 2-го узла по вертикали вверх

$$\theta_{1,2} = -\cos\varphi / l_1, \qquad \theta_{2,2} = \cos\varphi / l_1, \qquad \theta_{3,2} = 0,$$
$$\theta_{4,2} = \cos\varphi / l_1, \qquad \theta_{52} = -\cos\varphi / l_1;$$

в) при смещении 3-го узла вверх

$$\theta_{4,3} = -\cos\varphi / l_1, \qquad \theta_{5,3} = \cos\varphi / l_1, \qquad \theta_{6,3} = 1/l_4;$$

г) при смещении 5-го узла

$$\theta_{5,4} = 1/l_4, \qquad \theta_{6,4} = -2/l_1, \qquad \theta_{7,4} = 1/l_4;$$

д) при перемещении 6-го узла

$$\theta_{6,5} = 1/l_5, \qquad \theta_{7,5} = -1/l_5, \qquad \theta_{9,5} = -1/l_6, \qquad \theta_{10,5} = 1/l_6.$$

Значения углов $\theta_{i,j}$, полученные после подстановки числовых значений длин элементов $l_1 = l_2 = 1м$, $l_3 = 0{,}5м$, $l_4 = l_5 = 0{,}433м$, $l_6 = 0{,}866м$ и угла $\varphi = 30^\circ$, и записанные в виде столбцов, образуют *геометрическую матрицу*

$$[H_0]_{(8\times5)}=\begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0,5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0,5 & 0,87 & 0 & 0 \\ 0,87 & -0,5 & 1,44 & -2,31 & 0 \\ 0 & 0 & -2,31 & 4,62 & -2,31 \\ 0 & 0 & 0 & -2,31 & 2,31 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Данная матрица характеризует схему деформаций рамы, возникающую вследствие независимых узловых *линейных* перемещений (рис. 2,а). Т. к. ригель рамы принят нерастяжимым ($\zeta_2=\zeta_5$), то последний столбец данной матрицы следует совместить со вторым. Число неизвестных перемещений сокращается на единицу. После этого матрицу следует дополнить ещё двумя столбцами, элементы которых характеризуют единичные повороты Т-образных элементов рамы на углы ϑ_5, ϑ_6, соответствующие ещё двум возможным схемам деформаций; их индексы являются продолжением нумерации *линейных* перемещений. В итоге сосредоточенные деформации изгиба, а, проще, углы взаимного поворота поперечных сечений конечных элементов $\varkappa_1$, ..., $\varkappa_{10}$ в расчётных сечениях рамы, находят по формуле $\overline{\varkappa}_{(10)}=[H]_{(10\times6)}\overline{\vartheta}_6$, где

$$[H]_{(10\times6)}=\begin{bmatrix} 0,87 & -0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,87 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -0,87 & 0,5 & 0,87 & 0 & 0 & 1 \\ 0,87 & -0,5 & 1,144 & -2,31 & 0 & 0 \\ -2,31 & 0 & -2,31 & 4,62 & 0 & 0 \\ 2,31 & 0 & 0 & -2,31 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1,16 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1,16 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$\overline{\vartheta} = (\vartheta_1 = \zeta_1,\ \ \vartheta_2 = \zeta_2, ..., \vartheta_6)$ - обобщённый вектор узловых перемещений.

Выводы.

1. При выполнении расчётов на прочность, устойчивость и по несущей способности формирование геометрической матрицы целесообразно выполнять на основе геометрической матрицы [2].

2. Достоверность полученного результата подтверждается эквивалентностью транспонированной формы геометрической матрицы и матрицы равновесия рассматриваемой рамы в соответствии с принципом двойственности задач строительной механики [3].

Библиографический список:

1. Проценко А. М. Теория идеально-упругопластических систем. [Текст] М.: «Наука», 1982. 287 с.

2. Монахов В.А., Булавина Д.А. Построение схемы сосредоточенных изгибных деформаций рамы [Электронный ресурс] // Моделирование и механика конструкций. 2018. №8. Систем. требования: Adobe Acrobat Reader. URL: http://mechanicspguas.ru/Plone/nomera-zhurnala/no8/stroitelnaya-mehanika/8.5/at_download/file.

3. Ржаницын А. Ф. Расчёт стержневых систем с применением принципа двойственности // Исследования по теории сооружений. 1980. Вып. XXIV. С. 10-23.